JORGE BUESCU Professor na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

A estrada fractal para as partições

Ken Ono e Zach Kent

Hoje em dia todas as pessoas informadas ouviram falar de fractais. De acordo com a frase que abre o famoso livro "Os objectos fracctis", de Benoit Mandelbrot (falecido em Outubro de 2010), "nuvens não são esferas, montanhas não são cones, litorais não são círculos, e a casca das árvores não é lisa, assim como o raio não viaja em linha recta". Mandelbrot criou uma nova abordagem à Geometria, originária do ramo da Matemática, conhecida como Sistemas Dinâmicos, e as suas novas ideias incendiaram paisagens intelectuais improváveis.

As ideias de fractalidade e auto-semelhança (replicação de uma mesma estrutura a escalas cada vez menores, *ad infinitum*) ganharam subitamente adeptos um pouco por todo o lado. Sem dúvida por mérito próprio, porque de facto o Universo é muito mais complexo do que a descrição geométrica simples: as nuvens de facto não são esferas, nem os raios se propagam em linha recta.

Rapidamente os físicos compreenderam o potencial que os fractais tinham para revelar camadas de complexidade insuspeitas. Em Engenharia construíram-se modelos fractais, por exemplo, para fenómenos de percolação, úteis para exploração de campos petrolíferos. A indústria cinematográfica utilizou gráficos fractais para simular paisagens realistas (o primeiro filme em que isso aconteceu foi *Star Trek II: The wrath of Khan*, de 1982).

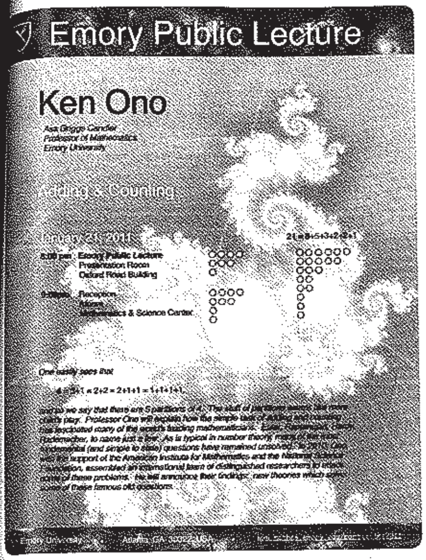
E, é claro, não podemos ignorar o efeito de verdadeira bomba psicológica que os inacreditáveis gráficos fractais, a começar pelo próprio conjunto de Mandelbrot por ele descoberto no final dos anos 60, constituíram. De repente parecia que essas máquinas aborrecidas, os computadores, tinham sido tomadas de assalto por um bando de *hippies* em plena viagem psicadélica por domínios inexplorados. O conjunto de Mandelbrot e os conjuntos de Julia, nos anos 80, começaram a aparecer reproduzidos em todo o lado, de posters a t-shirts ou lenços de senhora. Os fractais estavam definitivamente na moda.

É claro que este fenómeno foi extremamente útil para vender a ideia (que sensivelmente a cada quarto de século ressurge sob diferentes formas) de que a Matemática tinha finalmente encontrado a chave para compreender a Vida, o Universo e tudo o resto. Foi óptimo para os matemáticos que precisavam de financiamento; durante uma ou duas décadas, qualquer projecto de investigação que integrasse as palavras "fractais" ou "caos" tinha financiamento praticamente assegurado.

Houve contudo um problema embaraçoso, daqueles que todos conhecem mas ninguém gosta de falar: não houve desde Mandelbrot *um único* resultado matematicamente significativo para o qual as ideias sobre fractais tivessem tido contribuição. É claro que se avançou muitíssimo na compreensão dos fractais; mas o ponto é que eles tiveram, ao contrário do que se imaginava quando surgiram, impacto completamente nulo sobre as outras áreas da Matemática. Apesar das promessas reafirmadas e dos gráficos cada vez mais espectaculares, não havia um único teorema de uma área matemática estranha aos fractais que beneficiasse da sua existência. E isso é o beijo da morte para uma área da Matemática.

Tudo isso mudou em Janeiro de 2011.

O americano Ken Ono, matemático de largo espectro, mas especialista em Teoria de Números e Combinatória, demonstrou, para espanto do mundo matemático, dois resultados do ramo mais puro da Matemática, a Teoria de Números, utilizando de forma essencial conceitos de natureza fractal. Ono encerrou assim problemas com séculos, nos quais as abordagens mais habituais não tinham permitido grandes avanços, e demonstrou resultados extraordinários sobre partições de inteiros que ultrapassam provavelmente o que os grandes nomes da área, entre os quais o seu próprio criador Leonhard Euler, poderiam imaginar ser possível.



Anúncio da conferência onde Ono apresentou os seus resultados

Mas qual foi então a grande revolução matemática promovida por Ono?

A área em que se situa é a que Gauss apelidou de Rainha da Matemática, a Teoria de Números, e o conceito matemático de base é a partição de um número inteiro. Como a maioria dos conceitos básicos, é quase desanimador na sua simplicidade: uma partição de um número inteiro (positivo) é simplesmente uma forma de o decompor na soma de inteiros (positivos) menores ou iguais do que ele. Uma forma de pensar em partições é imaginar como é que um número de objectos indistinguíveis (berlindes, laranjas, grãos de arroz) pode ser decomposto em subconjuntos. Imagine o leitor, por exemplo, que tem um conjunto de cinco caixas que quer guardar na cave. De quantas formas diferentes as pode empilhar? Pode, por exemplo, colocar as cinco caixas lado a lado. Ou pode formar uma única pilha com as cinco caixas na vertical. Ou pode formar uma pilha de duas e outra de três. Cada uma destas disposições forma uma *partição* do conjunto inicial de cinco caixas.

A pergunta mais natural que se pode fazer a respeito de partições é, naturalmente, dado um inteiro n, qual o número de partições $p(n)$. Para o nosso exemplo de cinco caixas, $n=5$, não é muito difícil construir explicitamente todas as partições de 5:

$1+1+1+1+1$; $1+1+1+2$; $1+1+3$; $1+4$; $2+3$; $1+2+2$; 5.

Como o leitor se pode facilmente convencer, não há mais maneiras diferentes de "partir" o número 5 na soma de inteiros mais pequenos. Portanto, existem exactamente sete partições de 5. Em notação matemática, tem-se $p(5) = 7$.

Até aqui nada temos de especial. Por um processo análogo o leitor poderia concluir que $p(6) = 11$, $p(7) = 15$, $p(8) = 22$... e provavelmente por essa altura começaria a cansar-se da abordagem de força bruta e ocorrer-lhe-ia a seguinte ideia: a função $p(n)$ fica absolutamente determinada por n. Será que existe uma forma directa de calcular $p(n)$ em vez de construir todas as partições e contá-las uma por uma?

Esta ideia é muito boa, não só porque ter uma fórmula para uma função é uma forma extremamente económica de codificar todos os valores da função em simultâneo, como bastante mais profunda: a função $p(n)$ tem um comportamento muito estranho, aparentemente indomável. É claro que quanto maior for o número n, maior o número de partições – isso é completamente óbvio. Mas não só não existe nenhuma forma explícita para calcular o número de partições, como este cresce quase exponencialmente e de forma imprevisível. Na Tabela 1 o leitor pode apreciar o comportamento da função $p(n)$.

Tabela 1 – Valores de $p(n)$

n	$p(n)$
1	1
2	2
3	3
4	5
5	7
6	11
7	15
8	22
9	30
10	42
11	46
12	77
13	101
14	135
15	176
16	231
17	297
18	385
19	490
20	627
21	792
22	1002
100	190.569.292
1000	24.061.467.864.032.622.473.692.149.727.991

O leitor consegue detectar algum padrão no crescimento de $p(n)$ na coluna à direita? Aposto que não. De facto, à parte o facto de o número de partições crescer explosivamente com n, não parece existir qualquer padrão nos números que vão aparecendo como valores de $p(n)$. Bem podiam ser números aleatórios.

Este fenómeno é tanto mais irritante quanto as partições podem ser explicadas a uma criança de oito anos com berlindes ou grãos de feijão. *É claro* que há um padrão muito simples na formação destes números! Como é que eles nos podem parecer misteriosos? O que se passa aqui?

Este é exactamente o tipo de pergunta que excita a imaginação dos matemáticos: saber que, num problema muito simples de enunciar, devem existir padrões ocultos por baixo de camadas e camadas de complexidade e caos aparente. É um problema que desperta o espírito messiânico dos matemáticos; e muitos grandes nomes da Matemática se lhe dedicaram nos últimos 300 anos.

O estudo sistemático da função de partição com ferramentas matemáticas não-triviais iniciou-se com Leonhard Euler no século XVIII. Euler criou a ideia de função geradora (que se viria a revelar de enorme fertilidade) e aplicou-a às partições, obtendo uma fórmula recursiva para calcular partições. Durante um século e meio esta fórmula de Euler foi o único meio factível para se calcular $p(n)$; em 1915 era conhecido o valor de $p(200)$.

Pouco mais tarde, Hardy e Ramanujan provaram uma fórmula para o comportamento assimptótico de $p(n)$, mostrando que ele era de facto exponencial. Por volta dos anos 30, o matemático alemão Hans Rademacher descobriu uma fórmula para $p(n)$. Uma fórmula exacta mas, à boa maneira matemática, completamente inútil, pois implicava somar uma série infinita para calcular um número inteiro.

Muitos outros matemáticos se dedicaram à teoria das partições, que se revelava cada vez mais subtil e intratável à medida que a teoria ia descobrindo factos novos. No meio deste percurso, o matemático indiano Srinivasa Ramanujan descobriu uma propriedade →

muito estranha e aparentemente inexplicável. Ramanujan, ele próprio um matemático com um dote quase sobrenatural para descobrir padrões, mostrou que

$p(5n + 4) \cong 0 \ (mod\ 5)$,
$p(7n + 5) \cong 0 \ (mod\ 7)$,
$p(11n + 6) \cong 0 \ (mod\ 11)$.

Cada uma destas equações é uma *congruência*: por exemplo, a primeira afirma que o número de partições de um número da forma $5n+4$ é sempre congruente com 0 módulo 5, que é apenas uma forma sofisticada de dizer que é divisível por 5. De facto, consultando a Tabela 1, verificamos que p(4) = 5, p(9) = 30, p(14) = 135, p(19) = 490, e, efectivamente, todos este números são divisíveis por 5. Da mesma forma, p(5) = 7, p(12) = 77 e p(19) = 490, e todos estes números são divisíveis por 7, como afirma a segunda equação; e p(6) = 11, p(17) = 297, ambos divisíveis por 11, como afirma a terceira. Afinal existe estrutura escondida no aparente caos das partições. Mas ela é muito, muito subtil.

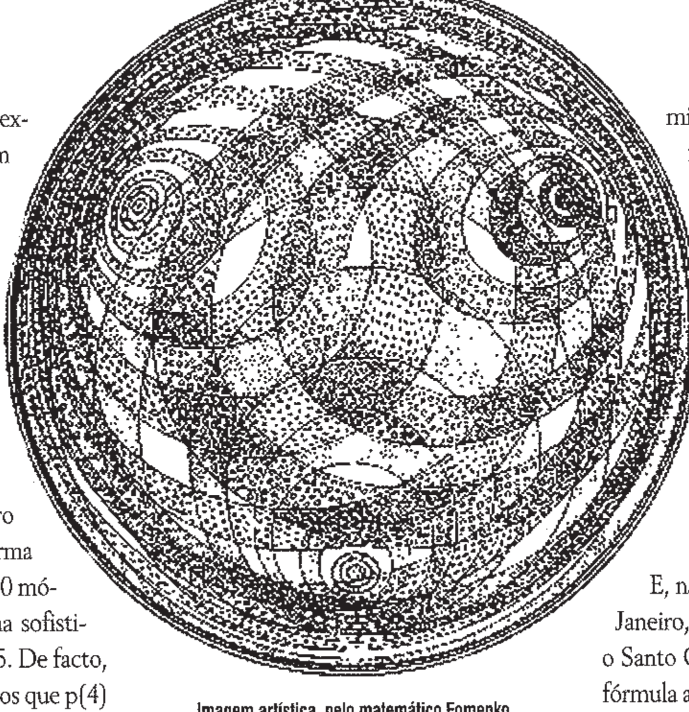


Imagem artística, pelo matemático Fomenko, da esfera unitária 3-ádica

O leitor poderia pensar que devem existir relações de tipo Ramanujan para módulos primos. Mas nem isso é verdade. O próprio Ramanujan adverte em 1919: "parecem existir propriedades análogas quando os módulos são potências de 5, 7 e 11 (...) mas não parecem existir propriedades simples quando os módulos envolvem outros primos para além destes". Parece magia! Podemos passar o resto da vida a tentar: não vamos descobrir mais estruturas destas para além das descobertas por Ramanujan! E de onde diabo surgem elas? O que há de especial com 5, 7 e 11? Porquê? Porque não outros primos como 13 ou 17?

A resposta foi dada em Janeiro de 2011 por Ken Ono, Amanda Folson e Zachary Kent, num artigo intitulado *l-adic properties of the partition function*. O que sucede é que as igualdades de Ramanujan são casos muito particulares de congruências muito mais complexas, que funcionam para todas as potências de primos, e que só são reveladas quando olhamos para os números através de uma ferramenta chamada "análise p-ádica", que corresponde a realizar uma análise de tipo fractal aos números inteiros para estudar a sua divisibilidade.

Olhar para os inteiros com lentes p-ádicas corresponde a dotá-los de uma estrutura fractal. E olhar para o problema com esta luz fractal revela uma cornucópia duplamente infinita de igualdades de congruência para todos os primos e suas potências, dos quais o caso particular da potência 1 fornece apenas três primos (5, 7 e 11, como Ramanujan afirmava) mas que, em geral, para potências arbitrárias, funciona para todos os primos. Não há nada de especial com 5, 7 e 11: mas só uma análise fractal aos inteiros permite perceber porquê – e revelar a estrutura infinitamente fina e auto-semelhante na aritmética das partições. Para dar um exemplo do próprio artigo de Ono, surge miraculosamente uma infinidade de fórmulas como

$p(13^3n + 1007) = 6p(13n + 6)$ (mod13).

Observe-se como, em ambos os argumentos, aparecem potências do primo 13. Isso seria algo indetectável por congruências do tipo Ramanujan. A estrutura fractal dos inteiros conduziu a Matemática nova!

E, não contente com isso, também em Janeiro, Ken Ono e Jan Bruinier atingem o Santo Graal da Teoria das Partições: uma fórmula algébrica finita para a função de partição, a que chamam $P(z)$. Estes resultados encontram-se pré-publicados em http://aimath.org/news/partition/folsom-kent-ono.pdf e http://aimath.org/news/partition/brunier-ono. O leitor interessado poderá também assistir a uma palestra de Ono, de cerca de uma hora, no Youtube, em www.youtube.com/watch?v=aj4FozCSg8g.

À parte o enorme interesse matemático destas descobertas, quais podem ser as suas aplicações? O ramo da Teoria de Números em questão é tão fundamental que é difícil prever as implicações. Mas há já coisas que se podem afirmar. Como diz Ono, os seus resultados liquidam a possibilidade de utilizar partições para encriptar dados de computador. "Nunca mais ninguém vai usar partições em criptografia, porque sabemos agora que elas não são aleatórias mas sim completamente previsíveis. Não podemos continuar a fingir que são misteriosas".

E, provavelmente em breve, seguir-se-ão as aplicações à Física. Os tabuleiros de Young utilizados em representações de grupos são construídos com partições. Seguremo-nos bem, porque as ondas de choque das partições vão começar a propagar-se. ■