JORGE BUESCU
Professor na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

AS MENINAS DO PADRE KIRKMAN

Num colégio interno, 15 boas amigas – – cujos nomes são, para fixar ideias, Ana, Beatriz, Catarina, Daniela, Eliana, Filipa, Graça, Helena, Inês, Joana, Kátia, Luísa, Mariana, Nuala e Ondina, e que passaremos a designar apenas pelas primeiras letras do nome – gostam muito de conversar umas com as outras. No entanto, o colégio é "à antiga"; tem regras muito estritas. As meninas devem caminhar da Residência para o edifício das aulas em formação: cinco filas de três alunas cada. E mais: cada aluna pode apenas conversar com cada uma das outras duas na sua fila. São proibidas conversas entre filas diferentes.

Um dia uma das amigas pergunta se será possível, com estas regras, encontrar uma distribuição tal que cada aluna tenha possibilidade de falar com todas as outras a caminho das aulas pelo menos uma vez por semana (entenda-se por semana 7 dias – afinal, estamos num colégio interno!). Isso significa, claro, que nenhuma das amigas pode caminhar na mesma fila mais do que uma vez com nenhuma das outras durante esses 7 dias. Será possível?

Foi exactamente este problema que o Reverendo Thomas P. Kirkman, que era também um matemático muito peculiar, publicou em 1850 numa fonte improvável: o *Ladies´ and Gentleman's Diary*, uma revista que trazia, à maneira da época, um pouco de tudo, incluindo receitas de cozinha, *puzzles* e enigmas. O problema proposto, literalmente em duas linhas, por Kirkman era o seguinte:

Quinze meninas de um colégio caminham em filas de três durante sete dias consecutivos: pede-se uma distribuição diária do grupo por forma a que nenhum par caminhe na mesma fila mais do que uma vez.

Este problema ficou famoso, e precisamente conhecido como o *problema das quinze alunas de Kirkman*. É de resto curioso observar que, embora Kirkman tenha sido um matemático de elevado nível, publicando mais de 60 artigos científicos, tendo criado um ramo da Matemática que hoje em dia se tem revelado cada vez mais importante – o chamado Desenho de Combinatória Discreta –, a sua fama fora do campo restrito de especialistas nesta área restrita se deva justamente ao problema das quinze alunas.

O problema não é extraordinariamente difícil, mas também não é trivial. Um pouco de experimentação por tentativa e erro revelará provavelmente ao leitor que os números 15, 7 e 3 no problema das alunas de Kirkman não surgem por acaso. Com mais alunas e mais filas, o problema tornar-se-ia impossível; com menos alunas haveria tantas soluções que o problema se tornaria trivial. O mesmo se poderia dizer de aumentar o número de alunas por fila ou o número de dias. Não, claramente estes números estão pensados para tornar o problema matematicamente interessante e não-trivial. Neste ponto aproveito para sugerir ao leitor que faça uma pausa, pouse a revista e pense um pouco no problema, como faria um leitor do *Ladies´ and Gentleman's Diary* no século XIX.

Antes de dar a resposta, uma versão mais actual deste problema dá pelo nome de "golfista social". Quinze jogadores de golfe, que designaremos pelas letras de A a O, pretendem jogar golfe todos os dias em grupos de três, de forma a que nenhum par de golfistas jogue entre si mais do que uma vez. Será possível?

Como foi dito acima, a solução não é trivial. Aliás, este pequeno problema proposto por Kirkman, com o seu delicado equilíbrio entre alunas, filas e dias, não surge por acaso: por esta altura ele estava já a desenvolver métodos matemáticos para o Desenho de Combinatória Discreta.

Sem entrar em detalhes, o campo em que este problema seria classificado na Matemática actual seria o de encontrar um *Desenho de Blocos Incompleto, Equilibrado e Resolúvel* (RBIBD) do tipo (15, 3, 1), também chamados *triplos de Steiner resolúveis*. Não é muito importante o leitor conhecer a definição destes termos algo esotéricos: se pretender saber algo mais a fundo poderá consultar muitas fontes na Web ou o enciclopédico *Handbook of Combinatorial Designs*, de Colbourn e Dinitz. O ponto crucial a reter é o seguinte: na notação (15, 3, 1), 15 é o número total de elementos; 3 é o número de blocos (n.º de alunas por fila, no exemplo de Kirkman) em que queremos dispô-los; e 1 é o número de vezes em que queremos que apareça, no máximo, cada par no conjunto dos dias.

Por aqui se vê que os números utilizados são críticos. Por exemplo, o problema análogo em que se pede que 12 alunas caminhem em grupos de 3 durante 5 dias – o problema (12, 3, 1) – é impossível. O leitor consegue encontrar uma solução? Pequena sugestão: utilize teoria de grafos.

A solução do problema das alunas de Kirkman foi publicada por Arthur Cayley (também matemático, famoso entre outras coisas pela descoberta dos quaterniões). *Spoiler alert*: se o leitor ainda está a pensar no problema original, deixe de ler agora – aqui vem a solução:

Tabela 1 – **Solução do problema das 15 alunas de Kirkman**

2.ª feira	3.ª feira	4.ª feira	5.ª feira	6.ª feira	Sábado	Domingo
A, B, E	A, C, F	A, D, H	A, G, K	A, J, M	A, N, O	A, I, L
C, L, O	B, M, O	B, C, G	B, H, L	B, F, K	B, D, I	B, J, N
D, F, M	D, G, N	E, J, O	C, D, J	C, I, N	C, E, K	C, H, M
G, I, J	E, H, I	F, L, N	E, M, N	D, E, L	F, H, J	D, K, O
H, K, N	J, K, L	I, K, M	F, I, O	G, H, O	G, L, M	E, F, G

Um dos grandes mistérios da Matemática é o facto de problemas inicialmente formulados e resolvidos num determinado contexto encontrarem, surpreendentemente, aplicações em áreas com origens completamente distintas. Isso aconteceu no século XX com a crescente importância da Matemática Discreta devida à crescente digitalização do nosso mundo. Assim, as áreas desenvolvidas por Kirkman, "Pai da Teoria do Design Combinatórico", tornaram-se cada vez mais influentes. Vejamos porquê.

O problema das alunas de Kirkman reflecte bem a ideia geral. A ideia é a partir de todas as "palavras" admissíveis a partir do alfabeto disponível – neste caso, observe-se que se podem construir $\binom{15}{3} = 455$ tripletos diferentes de 3 raparigas a partir de um conjunto de 15, pelo que existem 455 "palavras" possíveis, e na solução do problema intervêm apenas 35 – conseguir cobrir da forma mais eficiente possível todo o universo das ocorrências possíveis, minimizando o número de palavras utilizadas.

Desta perspectiva, trata-se de um problema de optimização discreta, e não é de espantar que ele surja cada vez mais no nosso mundo digital. Problemas discretos mais inerentemente complexos (e importantes!) como a criptografia, a concepção de redes ou o agendamento de eventos (de campeonatos a conferências internacionais) utilizam as mesmas ideias básicas: cobrir todo o universo de possibilidades a partir da minimização das palavras utilizadas. É aqui que surge, com toda a naturalidade, a necessidade de fazer apelo à Teoria do Design Combinatórico e ao conjunto de ideias iniciado por Kirkman, que nas últimas décadas conheceu um desenvolvimento explosivo.

Um caso particularmente importante e útil em que estas ideias são utilizadas é na Teoria de Códigos. A transmissão de sinais digitais, formados por 0s e 1s, em canais com ruído, provoca sempre erros de transmissão – 0s que se transformam em 1s e vice-versa. Talvez um raio cósmico interfira numa comunicação, talvez um pico de tensão tenha alterado um *bit* – não importa; há sempre ruído nas transmissões.

Em meados do século XX, os matemáticos Claude Shannon, Richard Hamming e Marcel Golay aperceberam-se de que as ideias de Kirkman e da Teoria do Design Combinatórico permitiam, para sinais digitais, criar *códigos detectores de erros* e mesmo *códigos correctores de erros*. A ideia essencial é inspirada na de Kirkman: em vez de se considerarem blocos de comprimento 1 (*bits* que, por definição, só podem tomar o valor 0 ou 1) consideramos como "palavra" do nosso alfabeto um *bloco* de *bits* – tal como o "bloco" do problema das alunas de Kirkman era formado por tripletos de alunas.

Assim, uma "palavra" válida no código passa a ser um bloco de *bits*. A questão é que nem todos os blocos de *bits* são admissíveis – – muito longe disso! Pelo contrário: temos aqui um problema de optimização discreta, em que queremos minimizar o número de blocos admissíveis. Assim, ficamos com um "alfabeto" formado por blocos de 0s e 1s com muito poucas palavras admissíveis.

Suponhamos agora que nos é transmitido um bloco de *bits* do comprimento certo, mas que corresponde a uma palavra que não existe no nosso alfabeto – ou, para regressar ao exemplo das alunas de Kirkman, que nos fosse fornecido um tripleto de alunas que não consta da lista dos 35 tripletos admissíveis dados na Tabela 1. Podemos, então, concluir imediatamente que houve um erro na transmissão – ou seja, dispomos de um *código detector de erros*.

Richard Hamming e Marcel Golay levaram o processo mais longe: mostraram como se pode, a partir das mesmas ideias básicas e com mais alguma sofisticação matemática, construir *códigos correctores de erros*. Ou seja, códigos em que o comprimento das palavras e o alfabeto estão optimizados de tal maneira que não só sabemos dizer que existiu um erro na transmissão, como sabemos identificar qual foi o erro e corrigi-lo automaticamente – transformando a mensagem recebida com erros na mensagem correcta inicialmente transmitida!

Hoje em dia, diferentes esquemas de códigos correctores de erros estão implementados nas mais diferentes formas de comunicação digital. Uma aplicação típica são as imagens enviadas pelas sondas espaciais, em que o facto de o sinal ser muito fraco e afectado por radiação cósmica provoca inevitavelmente a contaminação das transmissões. Mais mundanas, mas não menos importantes, são as aplicações às comunicações digitais via CD ou DVD, e mesmo às telecomunicações móveis. O leitor já se deu conta como, na altura dos discos (analógicos) de vinil, um pequeno risco, ou mesmo poeira, estragava definitivamente a gravação? No mundo digital, os códigos detectores de erros permitem que um CD ou DVD tenha um risco e a qualidade permaneça idêntica – porque o erro correspondente é automaticamente corrigido.

É extraordinário o poder da Matemática: até um inofensivo problema com alunas colegiais pode conter ideias que contribuam para mudar a face do Mundo 150 anos depois.