JORGE BUESCU
Professor na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Matemática, a Cidade e a Vida

Uma cidade tem muitas semelhanças com um ser vivo. A Matemática explica porquê.

Utiliza-se frequentemente a metáfora de uma cidade como um ser vivo. De facto, toda a agitação, burburinho e turbulência da vida diária nas cidades parece ser sinal de vida própria. A própria evolução da vida nas cidades, com o crescimento progressivo de urbanizações e centros de recursos – de cafés a supermercados, a escolas e a centros de saúde – onde antes havia apenas descampados, tudo isto parece característico de organismos vivos. E assim construímos uma imagem mental vitalista de uma cidade como um organismo dotado de uma vida própria.

É claro que esta imagem é uma metáfora, uma imagem mental conveniente. No entanto, uma das vantagens da abordagem matemática é que ideias tão vagas como esta podem ter tradução quantitativa. E, neste caso, aparentemente com sucesso: dados científicos recentes mostram que, de facto, existem ligações insuspeitadas em termos de organização colectiva entre as cidades e os seres vivos. Num sentido muito preciso, Lisboa e um rato são variações sobre um mesmo tema!

A história da matemática das cidades começa de uma forma improvável, com o linguista americano George Zipf. Nos anos 40 do século XX, Zipf estudou a ocorrência estatística de palavras em diferentes textos e diferentes línguas. E chegou a uma conclusão surpreendente. Suponhamos que nos é dado um certo *corpus* de termos linguísticos (digamos, as palavras que ocorrem n' *Os Lusíadas*, ou em *Hamlet*, ou num conjunto de jornais publicados hoje). Construamos agora a classificação destas palavras por ordem da frequência de utilização: em primeiro lugar, escrevemos a palavra mais utilizada, bem como a sua frequência; em segundo lugar, a segunda palavra mais utilizada e respectiva frequência; e assim por diante.

A observação empírica de Zipf ao construir estas classificações ordenadas foi completamente inesperada. O que ocorre é que a frequência com que uma palavra é utilizada é inversamente proporcional à sua posição na tabela. Ou seja, a palavra mais frequente ocorre com uma frequência dupla da segunda palavra, com uma frequência tripla da terceira palavra, e assim sucessivamente.

Mais ainda, este fenómeno é independente do *corpus* seleccionado – independente do conjunto de livros que se escolheu à partida, ou mesmo da língua em que se está a trabalhar. Neste sentido, embora sendo uma observação fenomenológica, trata-se de uma lei – que ficou justamente conhecida como *lei de Zipf.*

Quantitativamente, a lei de Zipf é relativamente simples de formular: ela afirma que, numa população com as características apropriadas, a probabilidade de se observar o n--ésimo elemento mais frequente é uma lei de potência

$$p(n) = k \cdot n^a \qquad (1)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade e o expoente a, para o caso da lei de Zipf, é aproximadamente -1. Também se diz que a lei (1) é uma lei de escala com expoente a.

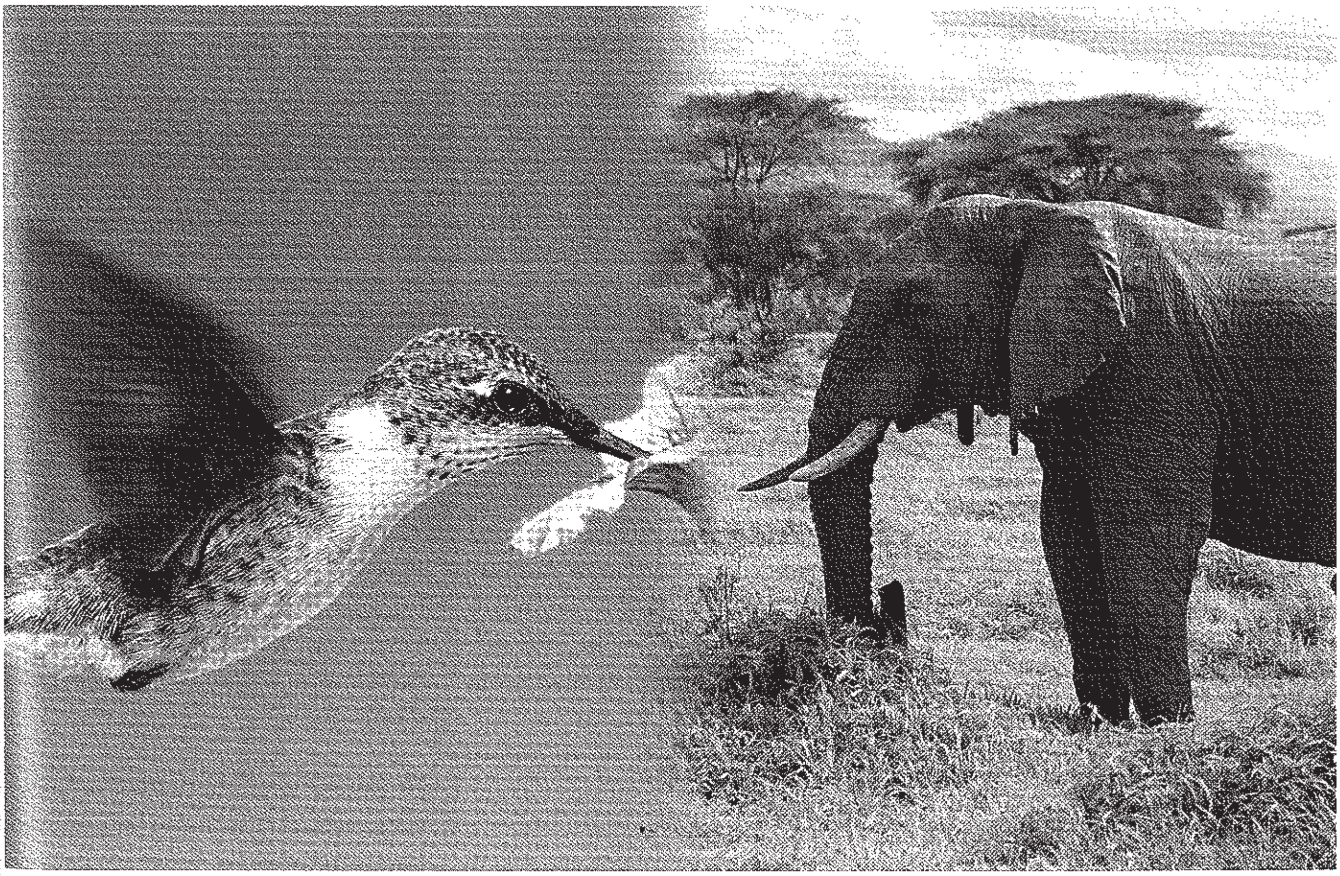
É claro que, tratando-se de uma lei fenomenológica – isto é, não deduzida de primeiros princípios –, a lei de Zipf é necessariamente uma aproximação. Por essa mesma razão, não existe uma boa explicação sobre a razão pela qual ela deve ser válida, ou seja, porque é que a utilização de palavras por seres humanos segue uma distribuição de Zipf. O facto é que as distribuições de tipo potência, como (1), são úteis para descrever populações em que há muitos dados afastados da média – razão pela qual são conhecidas por vezes como distribuições de *cauda pesada*: a frequência dos valores extremos, correspondentes à cauda da distribuição, decai como uma potência, muito mais devagar, portanto, do que uma curva normal.

Por outro lado, o próprio facto de não haver uma boa razão para a lei de Zipf estar especificamente ligada à linguística, pode tornar menos surpreendente o seguinte facto. A lei de Zipf é observada em muitos outros contextos não relacionados com a linguagem, como ordenações de pessoas por rendimentos, dimensões de empresas e, como foi observado pelo próprio Zipf, dimensões de cidades no mesmo país.

Tomemos, uma listagem das cidades americanas, ordenando-as de acordo com o número de habitantes. Na tabela resultante, a maior cidade tem o dobro de população da segunda, o triplo da terceira, e assim por diante. Para observar este fenómeno, basta fazer um gráfico log-log da posição das cidades em função da população: o declive é aproximadamente −1, o que é equivalente o expoente $a=-1$ na equação (1). Ou seja, à lei de Zipf!

É importante salientar uma vez mais que este padrão surge espontaneamente, como forma de auto-organização das estruturas analisadas. Não há nenhum planeamento central a gerir o crescimento das cidades, tal como não há nenhuma autoridade linguística a impor as frequências das palavras num texto. Mesmo que existam mecanismos explicativos em ambos os casos, eles serão provavelmente muito diferentes. Em resumo: temos uma lei, mas não temos uma teoria.

Viajemos agora até 2007. Um grupo de investigadores de Los Alamos liderado por Geoffrey West (do qual fazem parte os portugueses Luís Bettencourt e José Lobo) publica um artigo no *PNAS* sobre "Crescimento, inovação, escalas e o ritmo de vida nas cidades". Nesse artigo os autores analisam, não as dimensões das cidades em si, mas a forma como estas dimensões das cidades afectam uma série de variáveis socioeconómicas: o número de estações de serviço, o comprimento de cablagem eléctrica, o total de depósitos em bancos, o número de patentes, etc. É óbvio que, à medida que as dimensões da cidade crescem, todas as variáveis crescem: é claro que uma cidade com mais habitantes tem mais postos de abastecimento de gasolina, e o volume total de depósitos bancários é maior. A questão colocada é, contudo, mais subtil: existem diferenças na *escala* com que estes crescimentos se dão?



Os resultados uma vez mais são surpreendentes. As variáveis analisadas comportam-se →

JORGE BUESCU
Professor na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

muito aproximadamente, nos intervalos de variação analisados, de acordo com leis de potências do tipo (1). No entanto, a grandezas diferentes correspondem agora expoentes de escala diferentes.

West e a sua equipa identificam, assim, três tipos de grandezas, de acordo com o expoente da correspondente lei de escala.
Há grandezas que crescem com expoente menor do que 1, ou seja, mais devagar do que as cidades propriamente ditas: é o caso do número de bombas de gasolina, do comprimento dos cabos eléctricos utilizados ou da pavimentação das estradas. Estas grandezas estão tipicamente associadas a "infra-estruturas materiais". São claramente grandezas onde existe um fenómeno de economia de escala: se uma cidade é 10 vezes maior, não precisa de 10 vezes mais estações de serviço. O expoente correspondente a estas grandezas situa-se entre 0,75 e 0,8 – o que será comentado mais abaixo.

Em segundo lugar, há grandezas que crescem com expoente 1, ou seja, são proporcionais à dimensão da cidade. Entra as variáveis analisadas, são deste tipo o número total de habitações, o número de empregos e os consumos domésticos de electricidade e de água. Não é surpreendente que o expoente seja 1: trata-se de variáveis correspondentes a necessidades humanas individuais, e portanto seria até surpreendente que *não* fossem proporcionais ao número total de indivíduos envolvidos.

Em terceiro lugar, há uma grande quantidade de indicadores urbanos que crescem com expoente maior do que 1. Estão neste caso quantidades como o número de patentes, de inventores, de empregos em I&D, os salários, os depósitos em bancos ou o custo da habitação. Estas grandezas revelam bem a natureza de interacção social do crescimento das cidades: o crescimento sobrelinear significa a existência de retornos crescentes em função da dimensão da população e manifesta-se em grandezas com valor social, como a informação, a inovação ou a riqueza. Os expoentes característicos destas grandezas estão entre 1,1 e 1,3.

Estes resultados são muito interessantes, pois ajudam a compreender melhor em que aspectos é que uma cidade se assemelha a um ser vivo – e também em que aspectos difere. Para isso, teremos de recuar até aos anos 1930 e ao biólogo suíço Max Kleiber.

É mais ou menos claro que a taxa metabólica de um animal cresce com a sua massa: quanto maior é a sua massa, maior será a energia necessária para o manter em funcionamento. No entanto, não se segue deste facto que a taxa metabólica seja proporcional à massa do animal: há processos biológicos em que ocorrem "economias de escala". Por exemplo, o ritmo cardíaco de um beija-flor é de 1200 batimentos por minuto, enquanto o de uma baleia é de cerca de 8. Para um ser vivo intermédio, o ritmo é também intermédio (cerca de 70 batimentos por minuto no caso de um ser humano).

Kleiber estudou esta questão, chegando à conclusão de que numa grande gama de ordens de grandeza (entre o rato e a baleia) a taxa metabólica dos animais depende exclusivamente da sua massa M, e é dada por uma lei de potência

$$B(M) = M^a \qquad (2)$$

com expoente a=3/4. Esta é a *lei de Kleiber*.

O expoente 3/4 da lei de Kleiber é crucial. A taxa metabólica por unidade de massa, B/M, fica proporcional a $M^{-1/4}$, pelo que diminui com a massa M do animal. É este facto que permite uma economia de escala no consumo de energia: os animais maiores consomem menos energia por unidade de massa e de tempo.

Há outra razão, contudo, pela qual a lei de Kleiber é importante. Ao contrário do expoente −1 na lei de Zipf, existe uma compreensão teórica do expoente 3/4 da lei de Kleiber. Geoffrey West e James Enquist tinham conseguido explicar esse expoente através de um modelo da distribuição de recursos (energia e nutrientes) por parte do sistema sanguíneo do animal através do desenvolvimento de um sistema de ramificação dos capilares com estrutura fractal. É esse processo que gera o aparecimento do expoente 3/4 e o consequente desenvolvimento de economias de escala no metabolismo.

E é esta a ligação da Biologia à Matemática das cidades. As grandezas identificadas acima como "infra-estruturas materiais" – comprimentos de cabos eléctricos, canalizações, redes viárias – podem ser encaradas como desempenhando um papel análogo para a vida da cidade ao sistema circulatório para os animais. Assim, é de esperar que a sua lei de escala seja aproximadamente a dada pela lei de Kleiber. E, pelo que se viu acima, é! O expoente destas grandezas está muito próximo de 3/4.

Assim, a Biologia ajuda a compreender a Matemática das cidades. As economias de escala numa cidade ocorrem porque as grandezas infra-estruturais seguem uma lei de escala de tipo Kleiber.

Se esta análise revela em que é que uma cidade se assemelha a um ser vivo, por outro lado ajuda também a compreender em que sentido é que uma cidade é *diferente* de um ser vivo. Com efeito, as variáveis com expoente superior a 1 (de que são exemplos os salários, os depósitos bancários, as patentes ou os empregos "super criativos") não têm qualquer análogo biológico – o que se compreende bem, uma vez que se trata essencialmente de variáveis que reflectem o valor crescente da agregação social e o facto de cidades maiores estarem associadas a maiores taxas de produtividade.

Parecem ser assim as actividades ligadas à inovação e à riqueza, características da natureza social das cidades e para as quais não existe análogo biológico, o motor do crescimento urbano.

No entanto, nem tudo é risonho nesta descrição: entre as variáveis estudadas que revelaram expoente maior do que 1 encontram-se os custos com habitação, os casos de SIDA, o número de crimes ou a velocidade a que as pessoas caminham na rua. Estes factos têm uma interpretação bastante clara: correspondem à ideia intuitiva de que uma cidade grande é mais cara, mais perigosa e tem um ritmo de vida mais acelerado do que outra mais pequena. Podemos ter maiores rendimentos numa cidade grande, mas não temos necessariamente melhor qualidade de vida.

Dependendo daquilo que queremos na vida, maior pode não ser melhor.