JORGE BUESCU
Professor na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

O Mandelbolbo
Os fractais entram na terceira dimensão.

O estranho objecto apareceu em Novembro de 2009 na Internet, que desde então tem estado em efervescência. O inglês Daniel White, professor de piano apaixonado pela informática, parecia ter descoberto o Santo Graal dos apaixonados pelos fractais: um fractal que generaliza o famoso conjunto de Mandelbrot, conhecido e estudado há mais de 30 anos, a três dimensões. Pela sua aparência foi imediatamente baptizado como "Mandelbolbo" (fig.1).

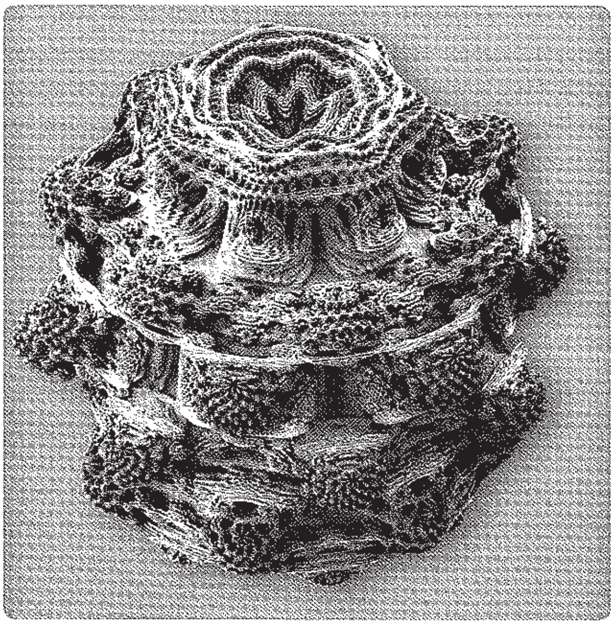

Figura 1

A própria situação é conceptualmente um pouco estranha. Embora se trate de um objecto estritamente matemático, a única coisa que se conhece sobre o Mandelbolbo são as suas representações gráficas obtidas por computador. Não há nenhum teorema que garanta estarmos a olhar para um objecto com existência matemática. E, contudo, um pouco de experiência computacional dissipa as dúvidas: o Mandelbolbo existe mesmo, não é um produto da nossa imaginação e merece ser estudado.

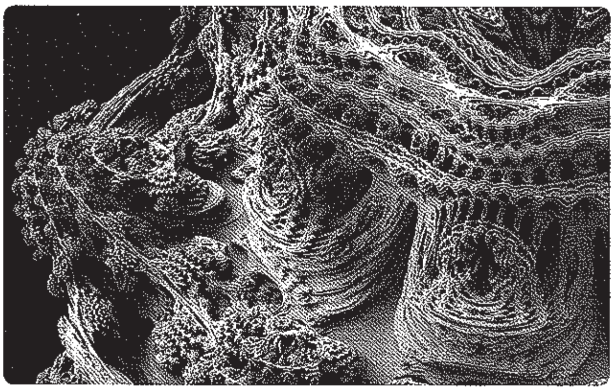

Figura 2

E o seu estudo será tudo menos fácil. Desde logo, porque o Mandelbolbo é um objecto com uma estrutura riquíssima e infinitamente detalhada. Visto de longe parece, de facto, um bolbo bastante encarquilhado e convoluído. À medida que nos aproximamos, as estrias e rugas revelam ter estrutura interna: parecem brotar jardins de plantas exóticas a partir de cada um dos salientes (fig. 2). Fazendo um *zoom* vemos que cada uma destas plantas exóticas tem no seu interior uma estrutura cada vez mais detalhada a escalas cada vez mais finas (fig. 3). Esta é a característica essencial dos fractais. O Mandelbolbo é, assim, tanto quanto humanamente se pode afirmar, um fractal.

Figura 3

Mas isto é apenas a superfície do objecto. O que é mais notável no Mandelbolbo é que é um objecto genuinamente tridimensional, e que, "entrando" no seu interior, obtemos visões de uma estrutura interna fractal a três dimensões. Daniel White iniciou uma "exploração" desta terra estranha e baptizou já algumas das suas estruturas. Podemos "entrar" no Mandelbolbo através de um portão a que ele chama a "caverna misteriosa" (fig. 4). Uma vez lá dentro, as surpresas são de tirar o fôlego, ultrapassando toda a imaginação.

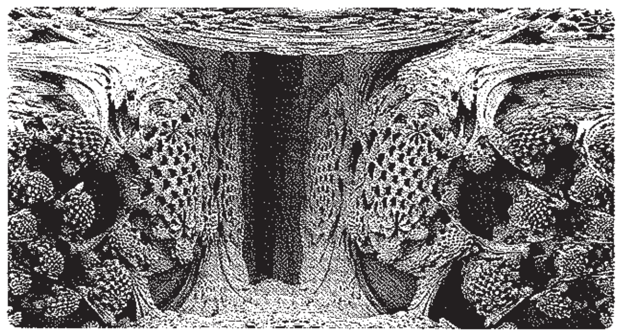

Figura 4

Com a iluminação adequada, podemos ver no Mandelbolbo estruturas infinitamente detalhadas que têm merecido nomes como "o paraíso das colmeias" (fig. 5), o "gelado de Neptuno" (fig. 6) ou o "crustáceo de Mandelbrot" (fig. 7). E muito, muito mais. O Mandelbolbo é um verdadeiro Universo em si mesmo, ainda inexplorado e com uma riqueza incalculável. Com os meios computacionais hoje existentes, essas explorações podem fazer-se de forma surpreendente: já existem no *youtube* viagens virtuais extraordinárias ao Mandelbolbo, uma das quais da autoria do próprio Daniel White, "Into the heart of the Mandelbulb".

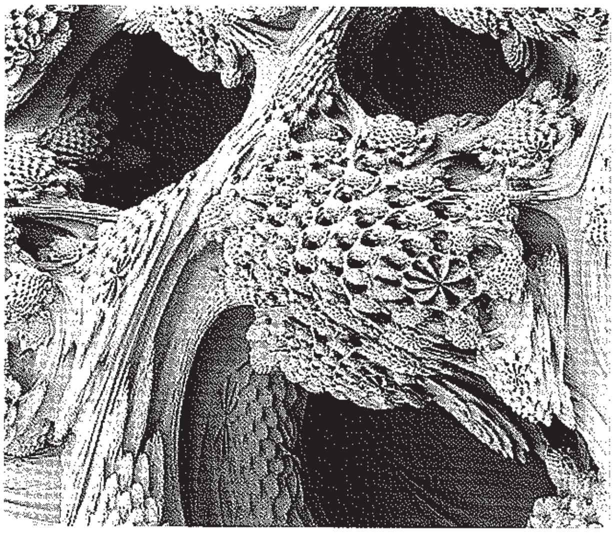

Figura 5

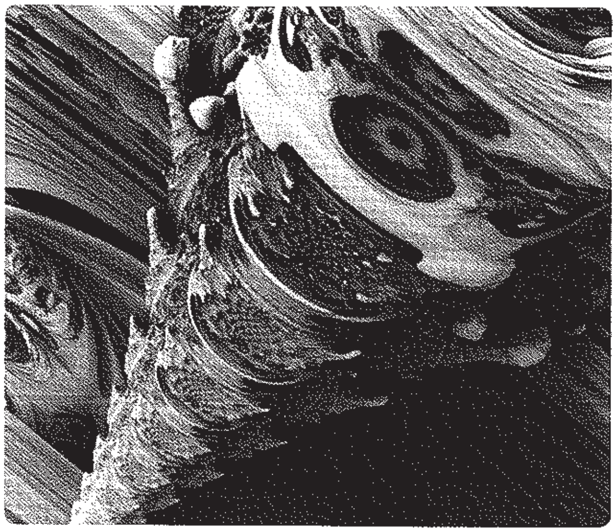

Figura 7

Qual o significado e interesse de tudo isto?

Comecemos pelo plano complexo. Nos anos 70 do século XX, foi descoberto um conjunto associado à transformação quadrática do plano complexo $f(z)=z^2+c$ que ficou conhecido como *conjunto de Mandelbrot*. A ideia essencial é seguir a órbita, por iteração de f, de cada ponto no plano complexo. Se esta órbita não diverge para infinito, isto é, fica numa região limitada do plano, o ponto original pertence ao conjunto de Mandelbrot.

O conjunto de Mandelbrot da aplicação quadrática está representado a negro na fig. 8 e foi intensamente estudado por matemáticos como John Hubbard, Adrien Douady e Benoit Mandelbrot. O conjunto de Mandelbrot é um fractal: possui estrutura a todas as escalas. Fazendo *zooms* sucessivos em regiões próximas da fronteira, a estrutura nunca se torna regular, mas contém réplicas, a escalas indefinidamente pequenas, das estruturas encontradas no próprio conjunto. Em particular, todo o conjunto se encontra replicado a escalas sucessivamente mais baixas no próprio conjunto, propriedade conhecida como auto-semelhança.

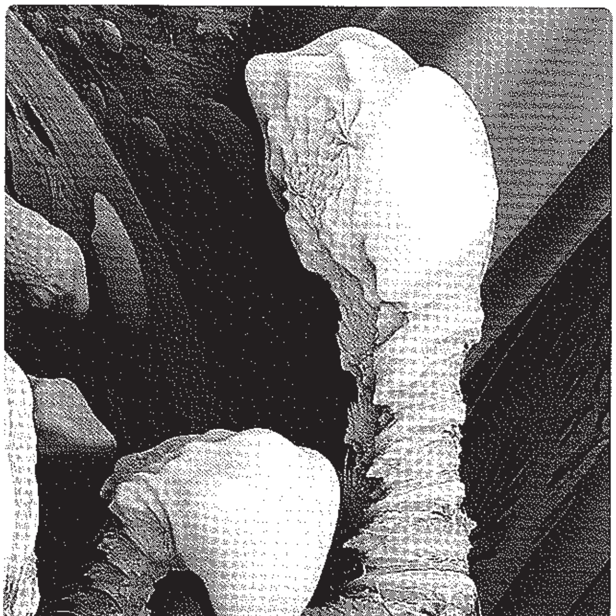

Figura 6

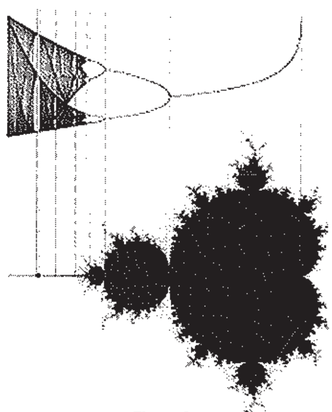

Figura 8

Apesar desta estrutura infinitamente rica e intrincada, é possível demonstrar factos matemáticos sobre o conjunto de Mandelbrot. Por exemplo: Hubbard mostrou que ele é conexo, isto é, que é composto por uma única peça. Escusado será dizer que as demonstrações são, por um lado, extraordinariamente difíceis e, por outro, tiram partido das ferramentas da Análise Complexa, muito mais poderosas do que as da Análise Real.

Por outro lado, o conjunto de Mandelbrot não é apenas uma construção matemática mais ou menos arbitrária. Ele tem significado dinâmico preciso: sobre o eixo real corresponde à iteração de uma função quadrática real e conduz ao conhecido cenário de transição para o caos por bifurcações de duplicação do período (parte de cima da fig. 8), observado pela primeira vez por Feigenbaum. Este comportamento é, de facto, observado em sistemas de equações diferenciais não-lineares que podem descrever desde sistemas electrónicos a meteorologia ou dinâmica de populações.

Assim, o interesse pelo conjunto de Mandelbrot é também motivado por aplicações a sistemas dinâmicos e fenómenos caóticos. Este facto faz dele o fractal mais estudado de todos.

Para quem veja a surpreendente beleza do conjunto de Mandelbrot sem se preocupar muito com a Matemática, impõe-se naturalmente uma questão: o conjunto de Mandelbrot é um fractal no plano. Conseguiremos encontrar um análogo no espaço tridimensional?

Para um matemático puro, a resposta intuitiva seria "claro que não".

JORGE BUESCU
Professor na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

O que sucede é que o conjunto de Mandelbrot vive no plano complexo; um número complexo tem duas compenentes, a parte real e imaginária, e podem ser somadas e multiplicadas de forma natural, extensão das operações correspondentes nos números reais.

Ora, como qualquer matemático sabe, o corpo complexo não pode ser "alargado" a dimensões suplementares preservando as operações. Os complexos são o maior corpo que existe. É impossível multiplicar vectores de $\mathbf{R}^3$ de forma matematicamente coerente (isto é, preservando as propriedades das operações). O matemático irlandês William Rowan Hamilton mostrou no século XIX que, em dimensão 4, se pode construir uma estrutura matemática mais fraca (os *quaterniões*) à custa de abdicar da comutatividade da multiplicação. Mas, em $\mathbf{R}^3$, não pode existir definição natural de multiplicação de vectores.

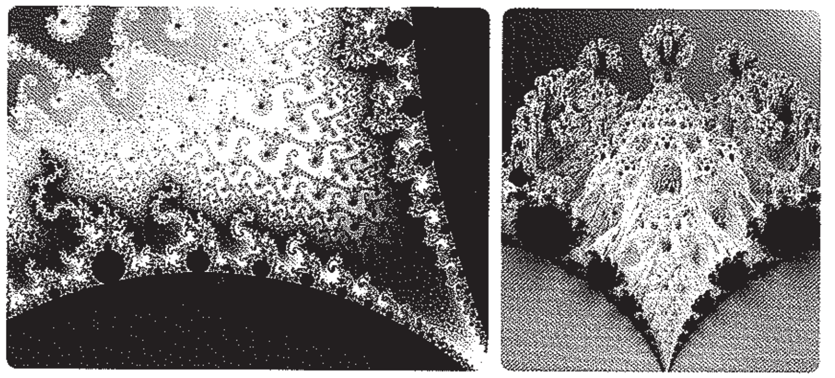

Figura 9

Esta é, portanto, uma barreira matemática essencial na construção de um análogo do conjunto de Mandelbrot em dimensão 3. Do ponto de vista de um matemático puro, é razão suficiente para nem sequer perder tempo com o assunto, tornando o assunto desinteressante. No entanto, para os amadores de fractais talvez a situação se tenha tornado ainda mais excitante. Se não existe forma "natural" de construir o análogo do Mandelbrot em dimensão 3, isso significa que se tem muito mais liberdade para imaginar formas de o fazer!

Com o advento de meios de computação numérica e gráfica cada vez mais sofisticados, nos anos 1990 e 2000 tornou-se possível verificar o resultado de diferentes propostas de generalização da iteração de Mandelbrot a dimensão 3. Mas, durante todo esse tempo, ficou claro que uma tal generalização não seria simples: os resultados gráficos eram sempre decepcionantes, incomparáveis à estrutura fina do conjunto de Mandelbrot original.

Depois de duas décadas de tentativas frustradas, em Novembro de 2009 Daniel White construiu uma fórmula *ad hoc* que parecia dar origem a um objecto tridimensional com complexidade geométrica não-trivial, que fazia recordar o conjunto de Mandelbrot (matematicamente, adapta o produto complexo em coordenadas polares às coordenadas esféricas de um ponto em $\mathbf{R}^3$). No entanto, o resultado continuava a ser de certa forma insatisfatório.

Ao descrever os seus resultados no fórum da Internet fractalforums.com, o informático e entusiasta de fractais Paul Nylander sugeriu uma modificação na sua fórmula (essencialmente passar de uma aplicação quadrática para outra de grau superior – o Mandelbolbo corresponde ao grau 8). E, utilizando a fórmula de White-Nylander, descobriu-se, desta forma experimental, o Mandelbolbo. Nascia o primeiro fractal (dinâmico) genuinamente tridimensional.

Se o Mandelbolbo está há meses a agitar as águas dos entusiastas dos fractais, do ponto de vista matemático trata-se de um objecto à espera de uma teoria. Em poucas palavras: não há um único teorema sobre o Mandelbolbo que levanta perguntas para as quais não só não temos resposta como muitas vezes nem sequer conseguimos conceber formas de atacar.

Para dar alguns exemplos: porque é que a fórmula de White-Nylander parece conduzir a um bom fractal tridimensional mas outras fórmulas não? E porque é que esta fórmula parece funcionar bem com expoente 8 mas não com expoente 2? Temos aqui uma verdadeira assimetria em relação ao que sucede no plano complexo, em que qualquer função, quadrática, de grau 8 ou transcendente, produz o seu próprio Mandelbrot.

Este facto pode sugerir que a fórmula de White-Nylander e o correspondente Mandelbolbo ainda não seja o Santo Graal dos fractais em dimensão 3. Mas, por outro lado, a verdade é que se observam muitas das estruturas do Mandelbrot como secções do Mandelbolbo: veja-se a figura 9, onde se compara o "vale dos cavalos-marinhos" do Mandelbrot com uma estrutura tridimensional correspondente no Mandelbolbo. Quando factos destes ocorrem em Matemática dificilmente pode ser coincidência; os objectos estão claramente relacionados.

E outras perguntas sérias se impõem. O conjunto de Mandelbrot tem um significado dinâmico claro, como foi acima dito. Será que o mesmo acontece com o Mandelbolbo? E qual o papel desempenhado pelas escolhas arbitrárias (fórmula de White-Nylander, grau 8) efectuadas? Ou seja: o Mandelbolbo tem significado e interesse matemático intrínseco?

E com que ferramentas matemáticas se pode estudar o Mandelbolbo? Para estudar o conjunto de Mandelbrot tínhamos a artilharia pesada da Análise Complexa. Mas, como um corpo maior do que os complexos, não existe análogo da Análise Complexa em $\mathbf{R}^3$. E eram as ferramentas super-poderosas da Análise Complexa que permitiam, apesar de tudo, provar resultados sobre o Mandelbrot. Agora, perante o Mandelbolbo, os matemáticos sentem-se literalmente desarmados. Até pode acontecer que o Mandelbolbo se venha a revelar um objecto matematicamente pouco interessante ou, no extremo oposto, intratável.

De uma coisa podemos ter a certeza: os entusiastas dos fractais não ficam à espera das respostas dos matemáticos para explorar este Admirável Mundo Novo. Para bem de todos nós, já existem na Web galerias sobre o Mandelbolbo que proporcionam imagens de cortar a respiração.

Para começar a sua própria exploração, recomendo ao leitor as páginas e artigos de Daniel White, www.skytopia.com/project/fractal/mandelbulb.html, de Paul Nylander, www.bugman123.com/Hypercomplex/index.html e de Jos Leys, *Mathematical Imagery*, Mandelbulbs, www.josleys.com/show_gallery.php?galid=330.

Nota: As imagens reproduzidas neste artigo foram gentilmente cedidas por Daniel White.