

O NÚMERO DE DEUS

Uma descoberta de 2010 forneceu, finalmente, um resultado há muito procurado: o número de Deus.

O número de Deus é 20. Pode o estimado leitor ficar tranquilo; esta afirmação não é efeito de um qualquer acesso místico do autor nem tem significado cabalístico ou outro do género. Trata-se, antes, de um resultado relativo a um problema matemático demonstrado em 2010.

Começemos pelo princípio. O que é "o número de Deus"? Como tantos conceitos matemáticos, desde as probabilidades no século XVII, ou a teoria de grafos no século XVIII, a sua origem está num humilde, se bem que hiperconhecido, jogo: o cubo de Rubik.

O *puzzle* conhecido por cubo de Rubik, inventado nos anos 1970 pelo húngaro Ernő Rubik, teve uma súbita explosão de popularidade a nível mundial no ano de 1979. Parecia uma febre: novos e velhos, pais e filhos, de repente todas as pessoas estavam viralmente obcecadas em aprender os movimentos, a forma como se podia completar uma face, acertar as cores com a peça central, e resolver o *puzzle*. Havia concursos em que os concorrentes tentavam fazê-lo o mais rápido possível. E foram publicadas dezenas de livros com técnicas para resolver o cubo.

O mais interessante é que a resolução do cubo de Rubik pode ser formulada como um problema matemático abstracto. Cada movimento permitido (girar uma face por 90 ou por 180) é uma operação que, pegando num cubo, origina um outro cubo. Isto corresponde precisamente à definição matemática de grupo. Assim, a construção da solução do cubo de Rubik pode ser vista abstractamente como a aplicação, aos objectos matemáticos que definem o grupo, das operações permitidas – não surpreendentemente chamadas *grupo do cubo* – de forma a atingir um seu elemento específico: a configuração do cubo em que todas as faces têm a mesma cor.

Não surpreende assim que os primeiros nomes associados à teoria do cubo de Rubik tenham sido alguns dos maiores matemáticos ligados à teoria de jogos. David Singmaster (que estará em Portugal, no *Recreational Mathematics Colloquium* a decorrer em Abril de 2013) publicou em 1981 um livro agradável, mas também com muitos detalhes técnicos, sobre o cubo e a sua teoria; e o trio mais famoso de matemáticos que se dedicam a problemas recreativos, John Conway, Elwyn Berlekamp e Richard Guy (também este já presente em Portugal, em edição anterior do mesmo Colóquio, em 2009), também se interessou pelo cubo de Rubik.

Mas afinal o que têm a Matemática, o cubo e os números a ver com Deus?

Como se afirmou, resolver o cubo de Rubik pode ser tecnicamente mais ou menos demorado, mas é possível ao fim de um número finito de passos. Basta pensar que há um número finito (embora astronómico) de configurações, pelo que experimentando-as uma a uma pelo método de força bruta atingiríamos a configuração desejada.

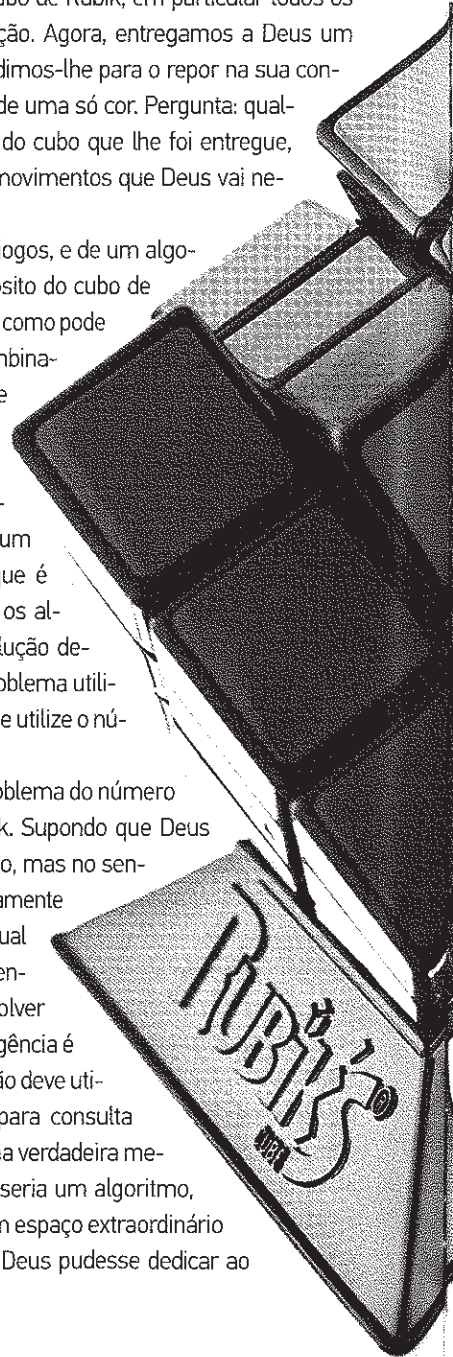
Como obviamente não temos à nossa frente toda a idade do Uni-

verso e pretendemos resolver o cubo de uma forma inteligente, teremos de utilizar algoritmos, métodos sistemáticos que permitam fazê-lo de forma eficiente.

É aqui que se coloca um problema matematicamente interessante – muito mais interessante do que a resolução do cubo em si. Muitos algoritmos que permitem resolver o cubo. Uns funcionam melhor para certos tipos de configuração de partida, outros para outras. Imaginemos, no entanto, que existe um ser onisciente – chamemos-lhe para simplificar, ou simplesmente por força do hábito, Deus – que conhece tudo sobre o cubo de Rubik, em particular todos os algoritmos para a sua resolução. Agora, entregamos a Deus um cubo de Rubik baralhado e pedimos-lhe para o repor na sua configuração original – cada face de uma só cor. Pergunta: qual quer que seja a configuração do cubo que lhe foi entregue, qual é o número máximo de movimentos que Deus vai necessitar de efectuar?

Esta concepção do Deus-dos-jogos, e de um algoritmo de Deus, surgiu a propósito do cubo de Rubik. Contudo, é óbvia a forma como pode ser aplicada a outros jogos combinatórios e matemáticos (isto é, que não dependam da sorte, como o Monopólio ou qualquer jogo de dados, mas apenas de estratégia, como o Hex). Diante de um problema deste tipo, Deus, que é onisciente e conhece todos os algoritmos que produzem a solução desejada, irá assim resolver o problema utilizando um processo óptimo, que utilize o número mínimo de passos.

Podemos então formular o problema do número de Deus para o cubo de Rubik. Supondo que Deus existe (não no sentido teológico, mas no sentido, muito preciso e matematicamente bem definido, acima exposto!), qual é o número máximo de movimentos de que necessita para resolver qualquer cubo? Uma outra exigência é que o algoritmo seja *prático*: não deve utilizar uma tabela gigantesca para consulta caso-a-caso, mas fornecer uma verdadeira metodologia. Caso contrário não seria um algoritmo, mas uma casuística a exigir um espaço extraordinário de memória (que talvez nem Deus pudesse dedicar ao cubo de Rubik).



Poderíamos talvez pensar que, como os computadores são hoje muito mais potentes do que nos anos 80, bastaria introduzir todas as configurações possíveis num computador para conseguir saber o número de Deus. Mas essa ideia ingénua rapidamente esbarra na realidade: com um total de configurações possíveis superior a $4,3 \times 10^{19}$, mesmo um computador que analisasse 1.000 configurações do cubo por segundo demoraria mais de mil milhões de anos a dar uma resposta – certamente mais tempo do que estaríamos dispostos a esperar por ela. Muito embora a análise computacional possa ajudar, neste problema – como na maioria dos problemas! – não existe substituto para a inteligência humana.

A procura do número de Deus foi uma aventura que durou três décadas e chegou agora ao fim. E foi uma aventura que não foi fácil. Por um lado, foram-se estabelecendo *limites inferiores* para o número de Deus: ou seja, mostra-se a existência de configurações cuja resolução exige um número mínimo de movimentos, o que tem como consequência que nem mesmo Deus conseguiria fazê-lo com menos. Por outras palavras, o número de Deus tem sempre que ser maior do que o limite inferior.

Por outro lado, foram-se também construindo *limites superiores* para o número de Deus, mostrando que o cubo pode sempre ser reconduzido ao seu estado final *no máximo* com um certo número de movimentos, qualquer que seja o seu estado inicial.

Assim, para se conhecer o número de Deus, a ideia de princípio é simples: ir aumentando o limite inferior e ir diminuindo o limite superior. Quando, e se, se conseguir mostrar que ambos são iguais, está encontrado o número de Deus.

Tudo isto, com o número astronómico de configurações possíveis, implica, obviamente, métodos mais sofisticados do que a força bruta. Por exemplo, no final dos anos 1970, David Singmaster mostrou que o limite inferior é (pelo menos) 18. Não o fez de forma construtiva mas sim indirecta: mostrou que o número total de configurações cujo limite inferior é 17 ou menos é menor do que o número total de configurações. Ergo, existem algumas configurações cujo limite inferior é 18.

O limite inferior estacionou durante cerca de 15 anos, até que em 1995 Michael Reid (hoje na Universidade da Flórida Central) construiu explicitamente uma configuração, conhecida como *superflip* (cantos correctos, peças de bordo na posição correcta mas viradas ao contrário) que exige de facto 20 movimentos. Assim, o limite inferior do número de Deus passou a ser 20.

Do lado do limite superior, o progresso foi muito mais turbulento – e excitante. O primeiro valor para o limite superior foi provavelmente dado por David Singmaster em 1979: 277 movimentos. Mais tarde, Berlekamp, Conway e Guy construíram um algoritmo mais eficiente, baixando este número para 160. E pouco depois, os *Cubistas de Cambridge*, um grupo de entusiastas de Matemática recreativa liderado por Conway, diminuíram esse limite para 94.

Em 1981 Morgen Thistlewaite, matemático na Universidade do Tennessee, realizou uma análise profunda do grupo do cubo, reduzindo o limite inferior sucessivamente até 52. De 1995 em diante, assistiu-se a um refinamento dos métodos matemáticos utilizados, o que, aliado ao cada vez maior poder dos computadores, permitiu ir baixando o limite superior.

Em 2010 Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson e John Dethridge, a culminar uma colaboração de vários anos, atingiram uma demonstração assistida por computador (com a ajuda da Google, que forneceu graciosamente o equivalente a 35 anos de CPU) de que o limite superior é, de facto, 20.

Ou seja, o número de Deus é 20.

À parte a natural excitação que o prazer intrínseco da exploração intelectual provoca, e que leva a que o problema do número de Deus seja estimulante pelo mero facto de existir e de agora sabermos a sua resposta, qual o interesse deste problema? Por exemplo, são hoje comercializados cubos de Rubik 4×4 , 5×5 , 6×6 e 7×7 . E podemos imaginar um cubo $n \times n$, com n inteiro arbitrário. Cada um terá o seu “número de Deus”. Porque valerá a pena investir décadas de esforço a tentar conhecê-los?

Por várias razões. A principal é que a teoria dos jogos matemáticos não é um mero divertimento de excêntricos, sendo um tópico moderno de investigação científica. Muitos problemas de jogos matemáticos e combinatórios se podem colocar em correspondência com problemas matemáticos “clássicos”, no sentido em que demonstrar uma propriedade sobre um jogo é equivalente a demonstrar um teorema matemático. O exemplo mais conhecido deve-se provavelmente a David Gale, que demonstrou em 1979 que o facto de o jogo de Hex não permitir empates é equivalente a um resultado matematicamente altamente não-trivial, o teorema do ponto fixo de Brouwer, geralmente demonstrado com ferramentas da topologia algébrica. Um exemplo bem mais sofisticado é o da construção dos números surreais por Conway e Knuth.

Os jogos matemáticos têm, assim, uma dignidade muito superior à de um passatempo. Nunca podemos saber quando e que resultados sobre jogos se poderão traduzir em genuínos resultados de matemática “tradicional”. O número de Deus para o cubo de Rubik 3×3 é 20. Será que isto tem algum significado matemático profundo? Ninguém sabe. E se conseguirmos produzir uma *Fórmula de Deus*, uma sucessão que, dada a ordem n do cubo, produza o seu número de Deus? Que consequência poderá isto vir a ter? Ninguém faz hoje a mais pálida ideia.

Faz sentido investir no desconhecido? Claro que faz. A Matemática é investigação. A palavra “investir”, de resto, é um subconjunto estrito da palavra “investigar”!

Nota: Jorge Buescu escreve, por opção pessoal, de acordo com a antiga ortografia.

