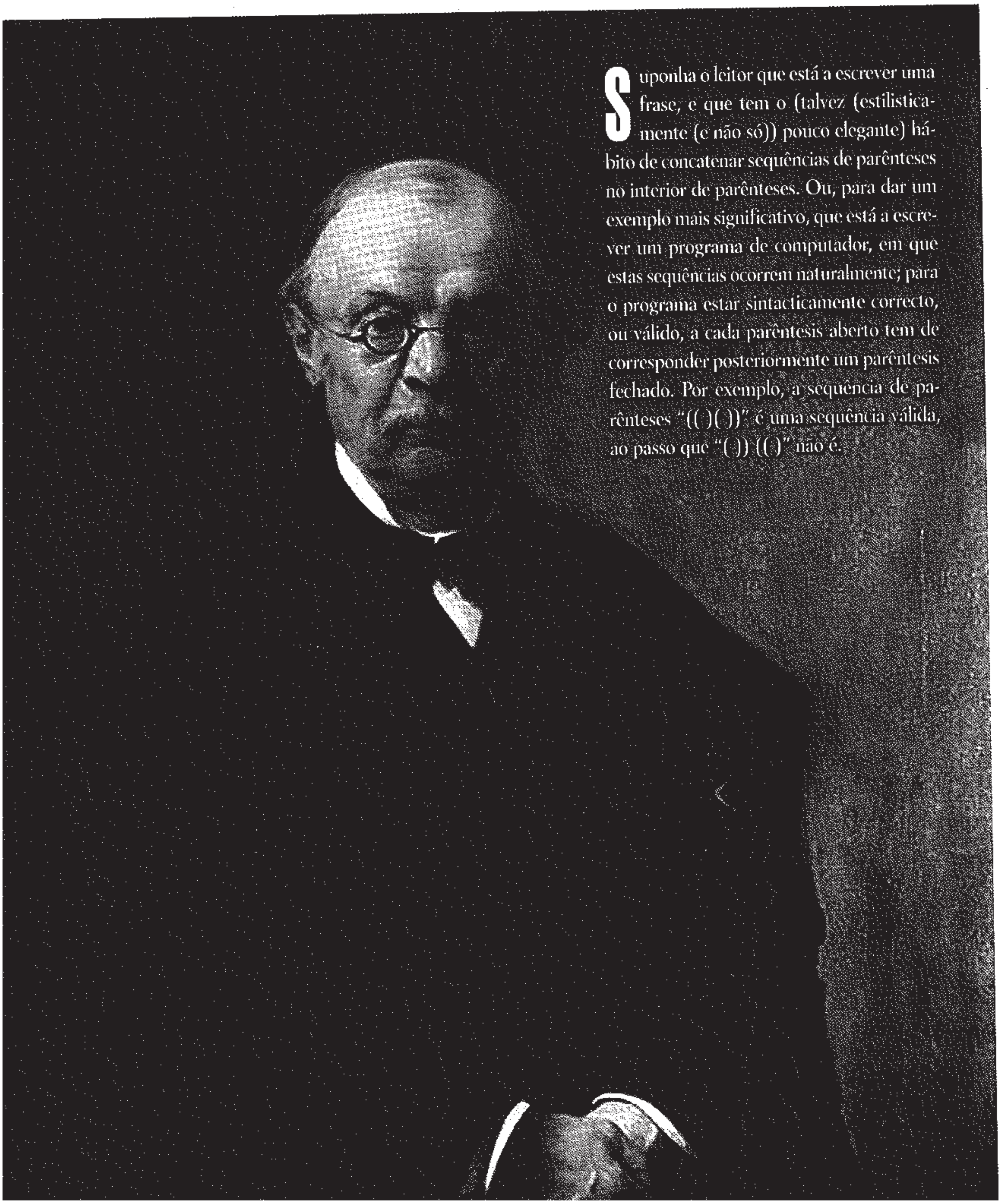
JORGE BUESCU
Professor na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Os incríveis números de Catalan

) que podem ter em comum parênteses, eleições ou cadeias de montanhas? A resposta é: Matemática.



Suponha o leitor que está a escrever uma frase, e que tem o (talvez (estilisticamente (e não só)) pouco elegante) hábito de concatenar sequências de parênteses no interior de parênteses. Ou, para dar um exemplo mais significativo, que está a escrever um programa de computador, em que estas sequências ocorrem naturalmente; para o programa estar sintacticamente correcto, ou válido, a cada parêntesis aberto tem de corresponder posteriormente um parêntesis fechado. Por exemplo, a sequência de parênteses "(( )( ))" é uma sequência válida, ao passo que "( )) (( )" não é.

Tabela 1 – **Contagem de sequências de parênteses admissíveis**

n	**Sequências admissíveis**	*Cn*
0		1
1	()	1
2	(()), ()()	2
3	()()(), ()(()), (())(), (()()), ((()))	5
4	()()()(), ()()(()), ()(())(), ()(()()), ()((())), (())()(), (())(()), (()())(), ((()))(), (()()()), (()(())), ((())()), ((()())), (((())))	14
5	()()()()(), ()()()(()), ()()(())(), ()()(()()), ()()((())), ()(())()(), ()(())(()), ()(()())(), ()((()))(), ()(()()()),()(()(())), ()((())()), ()((()())), ()(((()))), (())()()(),(())()(()), (())(())(), (())(()()), (())((())), (()())()(), (()())(()), ((()))()(), ((()))(()), (()()())(), (()(()))(),((())())(), ((()()))(), (((())))(), (()()()()), (()()(())), (()(())()), (()(()())), (()((()))), ((())()()), ((())(())), ((()())()), (((()))()), ((()()())), ((()(()))), (((())())), (((()()))), ((((()))))	42

Surge assim da forma mais natural possível uma pergunta: dados n pares de parênteses, de quantas formas diferentes é possível agrupá-los de modo sintacticamente válido (isto é, nunca fechando parênteses não abertos)? Para valores baixos de n, podemos proceder pelo método da força bruta: realizamos uma listagem exaustiva de todas as combinações válidas e contamo-las. A Tabela 1 apresenta o resultado para n entre 0 e 5 (convenciona-se, naturalmente, que há uma única forma de combinar 0 parênteses), designando por C_n o número de combinações admissíveis de n parênteses.

Poderíamos, com tempo e paciência suficientes, prosseguir a construção desta tabela. O resultado é uma sucessão C_n de números inteiros, cujos primeiros termos são 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845...

À primeira vista não parece haver nada de particularmente notável sobre esta sucessão. É crescente, naturalmente; e cresce rapidamente, o que também é natural – as combinações possíveis de n parênteses crescem muito rapidamente com n, pelo que é razoável que o número de combinações admissíveis também cresça rapidamente. Mas, à parte estas observações gerais, não é facilmente detectável nenhum padrão. Talvez esta sucessão não tenha nada de especial.

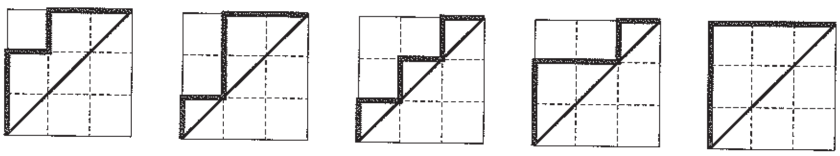


Figura 1

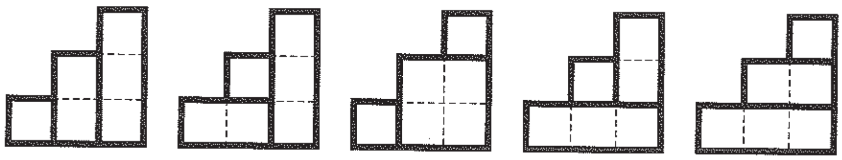


Figura 3

Consideremos agora um outro problema aparentemente sem relação com este. Suponhamos que dois candidatos, A e B, a uma eleição empatam, recebendo num universo eleitoral de $2n$ votantes, exactamente n votos cada um. Os votos são extraídos um a um da urna e contados. De quantas formas diferentes, em função de n, se pode fazer a extracção de modo a que o candidato A nunca esteja atrás de B na contagem?

Figura 2

Consideremos um outro problema. Numa grelha de quadrados $n \times n$, quantos percursos de comprimento $2n$ existem começando no canto inferior esquerdo e terminando no canto superior direito, construídos dando sempre um passo para cima ou para a direita, que nunca desçam abaixo da diagonal do quadrado? Este problema está ilustrado na figura 1 para $n=3$ quadrados. Como se vê, há exactamente 5 percursos deste tipo. Curioso: 5 é exactamente a resposta para o problema de 3 parênteses acima.

Prossigamos com ainda outro problema aparentemente diferente. Suponha o leitor que está num jantar formal, numa mesa redonda, com um número par, digamos $2n$, de pessoas. Os convivas querem cumprimentar-se com apertos de mão, mas por uma questão de boa educação os apertos de mão não se podem cruzar uns aos outros. De quantas formas diferentes os convivas podem cumprimentar-se simultaneamente?

Eis agora um outro problema de origem geométrica, chamado problema da *triangulação*. Suponhamos dado um polígono regular com $n+2$ lados (estritamente falando, não é necessário que o polígono seja regular; essa hipótese apenas simplifica a discussão). De quantas maneiras diferentes se pode subdividir esse polígono em triângulos? Na figura 2 constroem-se todas as subdivisões possíveis de pentágonos (que correspondem ao caso $n=3$). O resultado, mais uma vez, é 5.

Haverá relação entre estes problemas? Sim! A resposta a todos eles é a mesma: em função de n, todos eles têm como solução a mesma sucessão Cn acima apresentada.

Esta sucessão, chamada dos números de Catalan em honra do matemático belga Eugène Catalan (1814-1894), que a descobriu precisamente com o problema dos parênteses, aparece inesperadamente nos mais diferentes →

JORGE BUESCU
Professor na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

contextos. Por exemplo, eles dão o número de formas de construir uma escada de altura n com n blocos rectangulares (figura 3). E dão também o número de árvores binárias com uma raiz (em que cada nodo tem exactamente 0 ou 2 descendentes). De um modo geral, sempre que há problemas de combinatórica com restrições, é de esperar que os números de Catalan intervenham de alguma forma ou directamente ou como parte da solução.

De onde vem esta estranha ubiquidade dos números de Catalan? Afinal, ordenações de parênteses, eleições ou triangulações de polígonos não parecem ter qualquer relação entre si!

Uma forma de verificar que os números de Catalan são soluções de todos estes problemas é um raciocínio típico de um matemático: sem calcular a solução de nenhum, mostrar que eles são todos equivalentes entre si. Isso por vezes implica realizar construções engenhosas, mesmo contorcidas; mas, por outro lado, tem uma grande vantagem – se resolvermos um só destes problemas equivalentes, resolvemo-los todos ao mesmo tempo!

Vejamos, como primeiro exemplo, como é que o problema dos parênteses é equivalente ao das eleições. Suponhamos que nos é dada uma cadeia de parênteses. Vamos começar com um contador *S* em zero, e à medida que percorremos a cadeia de parênteses da esquerda para a direita somamos uma unidade a *S* de cada vez que encontrarmos um parêntesis "(" e subtraímos uma unidade de cada vez que encontrarmos um parêntesis ")". Então, a condição de a cadeia de parênteses ser válida pode formular-se simplesmente dizendo que a soma de controlo *S* tem que ser sempre maior ou igual do que zero (caso contrário estaríamos a fechar um parêntesis não aberto).

Esta construção mostra a equivalência ao problema das eleições. Suponhamos que os $2n$ votos nos candidatos A e B são extraídos de modo a formar uma cadeia sequencial *aabab...*, onde *a* representa um voto em A e *b* representa um voto em B. Então, se definirmos como anteriormente um contador *S e percorrermos a cadeia de votos* incrementando o contador por uma unidade de cada vez que passamos por um a e diminuindo-o por uma unidade de cada vez que encontramos um *b*, o problema consiste em contar todas as cadeias de símbolos de comprimento $2n$ em que o contador S é sempre maior ou igual a zero. Ou seja, é exactamente o mesmo problema do que o dos parênteses!

Analogamente, uma construção semelhante mostra também a equivalência a estes do problema dos percursos no quadrado que não descem abaixo da diagonal. Com efeito, se rodarmos cada quadrado 45° por forma a que a diagonal fique horizontal, queremos contar o número de percursos que sobem a 45° ou descem a 45°, que começam e terminam na linha horizontal e que ao longo do percurso nunca descem abaixo dela (como uma cadeia montanhosa que nunca desce abaixo do nível do mar). Este problema é, assim, equivalente aos anteriores.

O mesmo se aplica aos restantes problemas, bem como a muitos outros semelhantes em espírito: por meio de uma construção adequada, transformamos uns nos outros (matematicamente, dir-se-ia que são *isomorfos*). Assim, resolvendo um deles, resolvem-se todos em simultâneo.

Os números de Catalan podem, assim, ser construídos explicitamente resolvendo apenas um destes problemas equivalentes (a propósito, observe-se que o primeiro a construir os números de Catalan parece ter sido de facto Leonhard Euler, que formulou e resolveu o problema da triangulação dos polígonos). A sua forma explícita é dada por

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \quad n=0,1,2,\ldots \qquad (1)$$

Além de aparecerem em problemas de combinatória com restrições, os números de Catalan surgem ainda noutros contextos surpreendentes. São provavelmente o conjunto de números mais relevante na combinatórica, depois, evidentemente, dos próprios coeficientes binomiais. De resto, eles têm muitas propriedades curiosas e surpreendentes pelas quais merecem ser estudados por si próprios. Os números de Catalan satisfazem a recorrência não-linear

$$C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \ldots + C_{n-1}C_1 + C_nC_0 \qquad (2)$$

a partir da qual podem ser calculados por recorrência. Com $C_0 = 1$, obtém-se

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0\,C_0 = 1,\\ C_2 &= C_0\,C_1 + C_1C_0 = 1+1 = 2,\\ C_3 &= C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0 =\\ &= 2+1+2 = 5, \end{aligned}$$

e assim sucessivamente. A razão pela qual esta recorrência é válida compreende-se bem, por exemplo, à custa dos parênteses. Suponhamos que queremos contar as sequências válida de comprimento $n+1$, e já sabendo contar todas até comprimento n, inclusive. Ora, uma sequência válida de comprimento $n+1$ terá de ser do tipo (A)B, onde A e B são sequências válidas cujo comprimento conjunto é n; se A tiver comprimento k, então B tem comprimento $n-k$. Somando sobre todas as possibilidades $k=0, \ldots, n$, obtemos a recorrência (2).

Outra instância da relação entre os números de Catalan e os coeficientes binomiais é que aqueles ocorrem natural, embora disfarçadamente, no triângulo de Pascal, e até de várias formas. Se tomarmos, no triângulo de Pascal, cada elemento da coluna vertical central e lhe subtrairmos o elemento adjacente na mesma linha, obtemos a sucessão dos números de Catalan. Se tomarmos um elemento na vertical central e o dividirmos pelo seu número de ordem nessa coluna vertical central, obtemos o número de Catalan correspondente, o que é uma consequência imediata de (1).

Muito mais se sabe sobre os números de Catalan, que têm uma estrutura inesperadamente rica e bela e merecem ser estudados por si próprios. Talvez, no entanto, o mais impressionante seja a forma como eles representam a unidade na aparente diversidade de Matemática: o matemático Richard Stanley cita, no seu monumental *Enumerative Combinatorics*, um conjunto de 173 problemas aparentemente distintos, todos eles tendo como soluções os números de Catalan.

Os números de Catalan reflectem aquela que é provavelmente a maior fonte de beleza na Matemática: mostrar como coisas aparentemente diferentes são, na realidade, a mesma. ■